Analyse 25-06-'03

Tentamenopgave[1]

I

Beschouw de functie f gedefineerd op $\mathbb{R}^2$ door

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

1. Bepaal de stationaire punten van f en hun aard: lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt.

2. Bepaal het waardebereik van f. Zou een van de stationaire punten een absoluut maximum of minimum kunnen zijn ?

II

1. Zij

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1\}$$

Toon aan dat S compact is.

2. Formuleer de stelling van Weierstrass betreffende maxima en minima van een functie van meerdere variabelen.

3. Zij $f(x,y,z) = x + y + z$. Toon aan dat de functie f, beperkt tot S, op S een maximum M en een minimum m aanneemt.

4. Bereken m en M en bepaal de plaatsen $p \in S$ en $q \in S$ waar deze waarden worden aangenomen.

III

1. Zij $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$.

a. Bereken $I = \iint_D x^2 y dxdy$ in cartesische coördinaten.

b. Beschrijf D in poolcoördinaten en bereken I in poolcoördinaten.

2. Zij $O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$. Bereken $\iiint_O x dxdydz$.

IV

1. Zij $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - z^2)$.

Geef de totale afgeleide van f in het punt $(2,1,1)$:

$$(h,k,\ell) \mapsto f'(2,1,1)(h,k,\ell)$$

2. Zij

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 4\}$$

a. Bepaal de raakruimte V_0 aan S in $(2,1,1)$.

b. Bepaal het raakvlak V aan S in $(2,1,1)$.

[1]De onderdelen I, II, III en IV zijn onafhankelijk

9,4

I-1 $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (3x^2-3y, 3y^2-3x) = (0,0)$

$3x^2 - 3y = 0 \rightarrow x^2 = y$

$3y^2 - 3x = 0 \rightarrow y^2 = x$

$(0,0)$; $(1,1)$ zijn stationaire punten.

$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(0) = 0$; $\det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -9$ dus zadelpunt ✓

$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$\det(6) = 6 > 0$; $\det \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$ dus pos. def. $\rightarrow$ lokaal ~~max~~ minimum ✓

2 Voor $y = 0$ constant zien we:

$f(x,0) = x^3$

$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$

Dus het bereik van f is $(-\infty, \infty)$ en f heeft geen absoluut maximum of minimum. ✓

II-1 Stelling: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1\}$ is compact.

Bewijs: de stelling is equivalent met: S is gesloten en begrensd. ✓

- S is begrensd omdat het een opgerekte bolschil is: S is bevat in $B(0,2)$ want
  $B(0,2) = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
  $= \{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \leq 1\}$
  en als $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ dan geldt zeker, omdat $\forall x$ $\frac{x^2}{4} \leq x^2$, dat $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \leq 1$. ✓
- S is gesloten vanwege het rijtjeskenmerk: neem (x_n) met $x_n \in S$. Stel $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan bestaat voor alle $\varepsilon > 0$ een N zodat voor $n \geq N$ geldt dat $\|x_n - x\| < \varepsilon$.
  Voor x_n geldt omdat $x_n \in S$: $x_n = (x_n, y_n, z_n)$
  $x_n^2 + \frac{y_n^2}{4} + \frac{z_n^2}{4} = 1$ (zie blad 2 voor vervolg) ✓

2 Stelling: zij $S \subset \mathbb{R}^n$ een compacte verzameling en $f: S \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan bereikt f een maximum en een minimum op S. ✓

3 S is een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^3$ en f is lineair, dus continu. Uit de stelling van Weierstrass volgt dus direct dat f op S een maximum en een minimum aanneemt. ✓

4 $f(x,y,z) = x+y+z$

$g(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$

$\nabla f = (1, 1, 1)$

$\nabla g = (2x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z)$

$\nabla f = \lambda \nabla g$

$(1,1,1) = (\lambda 2x, \lambda \frac{1}{2} y, \lambda \frac{1}{2} z)$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda 2x = 1 \\ \lambda \frac{1}{2} y = 1 \\ \lambda \frac{1}{2} z = 1 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 \end{array}\right\}$$

$y = z \to$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda 2x = 1 \\ \lambda \frac{1}{2} y = 1 \\ x^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to x = \frac{1}{2\lambda} \\ \to y = \frac{2}{\lambda} \\ \to \quad \hookrightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2} = 1 \end{array}$$

$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{8}{4\lambda^2} = \frac{9}{4\lambda^2} = 1 \to 4\lambda^2 = 9 \to \lambda^2 = \frac{9}{4} \to \lambda = \pm \frac{3}{2}$

$\lambda = \frac{3}{2}$:	$\lambda = -\frac{3}{2}$:
$3x = 1 \to x = \frac{1}{3}$	$-3x = 1 \to x = -\frac{1}{3}$
$\frac{3}{4} y = 1 \to y = \frac{4}{3}$	$-\frac{3}{4} y = 1 \to y = -\frac{4}{3}$

$(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ en $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ zijn stationaire punten.

$f(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = 3$ ~~dus dit is~~

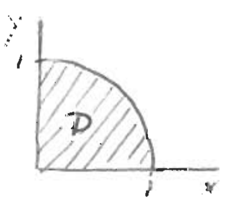
$f(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) = -3$

Omdat het maximum en minimum bestaan volgens II-3 moeten dit ze zijn:

$M = 3$ in $q = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ ✓

$m = -3$ in $p = (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ ✓

III-1a $D = \{(x,y) \mid x > 0 \wedge y > 0 \wedge x^2 + y^2 < 1\}$



Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent:

III-1a (vervolg) $f(x,y) = x^2 y$

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} y^2 x^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \tfrac{1}{2}(1-x^2)x^2\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^4\right) dx = \left[\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{10}x^5\right]_{x=0}^{x=1} = \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{15} \quad \checkmark$$

b $D = \{(r,\theta) \mid 0 < \theta < \tfrac{1}{2}\pi \ \wedge\ r < 1\}$

$(x,y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \varphi(r,\theta)$

$f(\varphi(r,\theta)) = r^2\cos^2\theta \cdot r\sin\theta = r^3\cos^2\theta\sin\theta$

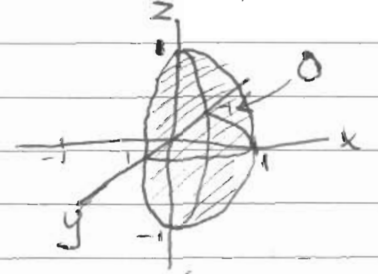
$|J(\varphi)| = r$

$$I = \iint_D f(r,\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\int_0^1 r^4 \cos^2\theta\sin\theta\,dr \right] d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\tfrac{1}{5} r^5 \cos^2\theta\sin\theta\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tfrac{1}{5}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= -\tfrac{1}{5}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (-\sin\theta)\cos^2\theta\,d\theta = -\tfrac{1}{5}\left[\tfrac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{1}{2}\pi} = -\tfrac{1}{5}\left(0 - \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{1}{15} \quad \checkmark$$

2 $O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \ \wedge\ x^2+y^2+z^2 < 1\}$



$O^* = \{(x,r,\theta) \mid 0 < x < 1 \ \wedge\ 0 < r < \sqrt{1-x^2} \ \wedge\ 0 < \theta < 2\pi\}$

$(x,y,z) = (x,\ r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \varphi(x,r,\theta)$

$$\det(\varphi') = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) = r$$

$$\iiint_O x\,dx\,dy\,dz = \iiint_{O^*} x r\,dx\,dr\,d\theta = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x r\,dr \right] d\theta \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{2} r^2 x\right]_{r=0}^{r=\sqrt{1-x^2}} d\theta \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}x(1-x^2)\,d\theta \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x(1-x^2)\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dx = \int_0^1 (\pi x - \pi x^3)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}\pi x^2 - \tfrac{1}{4}\pi x^4\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{4}\pi \quad \checkmark$$

IV-1 $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2-z^2)$

$f'(x,y,z) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (x, y, -z) = \nabla f$

$f'(x,y,z)$ is een afbeelding $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f'(2,1,1) = (2, 1, -1)$; $(h,k,l) \mapsto (2h, \cancel{k, -l})$

$2h + k - l$

2a $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 4 \}$

$(2,1,1) \in S$

$(-1, 2, 0) \perp (2,1,1)$ want $\langle(-1,2,0),(2,1,1)\rangle = -2+2+0 = 0$

$(2,1,-5) \perp (2,1,1)$ en $(2,1,-5) \perp (-1,2,0)$ want

$(2,1,1) \times (-1,2,0) = (2,1,-5)$

Dus $V_0 = \{ (x,y,z) \mid (x,y,z) = s(-1,2,0) + t(2,1,-5),\ s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \}$

b $V = V_0 + (2,1,1)$ dus

$V = \{ (x,y,z) \mid (x,y,z) = s(-1,2,0) + t(2,1,-5) + (2,1,1),\ s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \}$

II-1 (vervolg) ~~Omdat $\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{x}$ weten we $\lim_{n\to\infty} \|\underline{x}_n - \underline{x}\| = 0$~~

~~$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2+(z_n-z)^2} = 0$ dus~~

~~$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en evenzo voor y en z~~

Kan ook direct

Stel nu dat $\underline{x} \notin S$. Dan geldt met $\underline{x} = (x,y,z)$ dat $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \neq 1$

Omdat $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en evenzo voor y en z geldt: $\lim_{n\to\infty} x_n^2 + \frac{y_n^2}{4} + \frac{z_n^2}{4} = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4}$ en dit is $\neq 1$ volgens de aanname. Maar $x_n^2 + \frac{y_n^2}{4} + \frac{z_n^2}{4} = 1$ voor alle n, dus $\lim_{n\to\infty} x_n^2 + \frac{y_n^2}{4} + \frac{z_n^2}{4} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Dit levert een tegenspraak; blijkbaar geldt $x \in S$ dus is S gesloten.

S is dus gesloten en begrensd, dus compact.